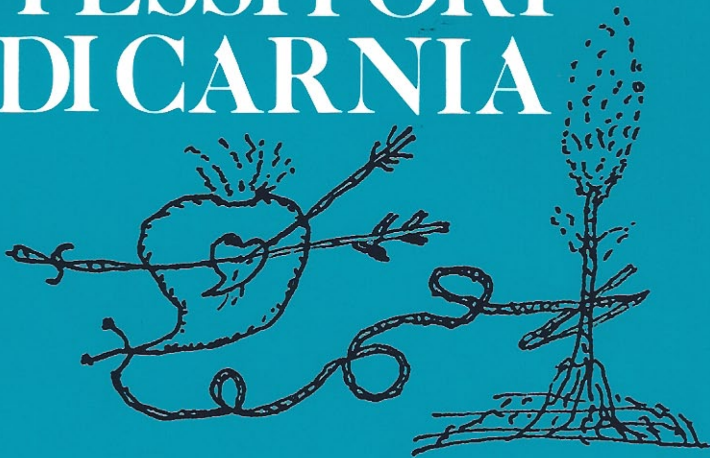
TESSITORI DI CARNIA



Il sapere tecnico nel
LIBRO DI TACAMENTI
di Antonio Candotto
(XVIII secolo)

Editrice Goriziana

Carlo Felice Manara

NODI, TRECCE, TESSUTI, UN CAPITOLO DELLA GEOMETRIA

1

Si potrebbe dire che l'attività di tessere, e di far nodi è una delle più antiche espressioni e realizzazioni della ingegnosità dell'uomo.

È quindi praticamente impossibile assegnare una data, o almeno un'epoca d'inizio di questa attività, della quale si ritrovano tracce e prove nei monumenti storici più antichi; pensiamo, per esempio, ai tessuti trovati addosso alle mummie egiziane, oppure ai fili annodati trovati nei monumenti precolombiani, dei quali forse quelle popolazioni si servivano come calendari o per comunicare altre informazioni.

Appare quindi abbastanza naturale il fatto che i tessitori siano giunti a simbolizzare e quasi a codificare con opportuni simboli convenzionali le tecniche da adottarsi per ottenere certi tipi di tessuto, e per far risultare certi disegni. È anche interessante osservare che queste rappresentazioni simboliche siano state conservate nelle famiglie, quasi come dei patrimoni intellettuali, dei documenti destinati a testimoniare dell'abilità degli artigiani, ed a trasmettere ai discendenti i segreti di un mestiere che era apprezzato e stimato, anche fuori dei confini della comunità nella quale l'artigiano viveva, e spesso anche in plaghe molto lontane. Erano infatti le circostanze della vita dei nostri avi, che rendevano utile e quasi necessaria la comunicazione delle abilità artigiane, e che diffondevano anche la notizia di queste abilità, che spesso identificavano certe regioni attraverso l'ingegnosità dei loro abitanti. L'esempio che viene spontaneo alla memoria è quello dei *Maestri comacini*, i quali per generazioni e per secoli furono famosi nelle arti della scultura, nel maneggio della pietra, nell'architettura e nelle arti murarie.

Ad un livello molto più modesto, chi scrive ricorda di aver avuto nella propria famiglia delle lenzuola fatte con il lino filato da una nonna o bisnonna (non conosciuta); e di aver udito raccontare che, nel lontano passato, le famiglie contadine della Lomellina, durante l'inverno, si riunivano a gruppi nelle stalle, per godere del minimo calore emanato dalle bestie, e per risparmiare l'olio delle lucerne (ne bastava una per tutti!). Durante quelle lunghe serate invernali le donne filavano il lino e gli uomini riparavano gli arnesi del lavoro agricolo, o si davano ad altre attività occasionali.

In primavera poi, nei vari paesi giravano dei tessitori, che venivano probabilmente dalle regioni del Veneto, e trasportavano dei telai smontabili; costoro si fermavano nei singoli paesi per il tempo sufficiente a tessere quel lino che le donne avevano filato durante l'inverno.

Non fa meraviglia quindi il venire a sapere che le forme delle annotazioni con le quali i tessitori friulani memorizzavano i segreti della propria ingegnosità e della propria arte si ritrovino quasi identiche in annotazioni analoghe di tessitori che vivevano in regioni remote dell'Europa.

2.

Le riflessioni che abbiamo fatto poco fa potrebbero anche essere giudicate abbastanza banali, se si considera il fatto che l'operazione di simbolizzazione e di codificazione si incontra in tutte le attività specificatamente umane; basti pensare ai vari linguaggi, ed alla scrittura, che è essenzialmente un insieme di simboli convenzionali, destinati alla codificazione dei concetti ed alla trasmissione dell'informazione. Tuttavia si potrebbe anche riflettere sul progresso della simbolizzazione dei concetti e delle relazioni tra essi; e ciò si può riferire non soltanto all'evoluzione ed all'arricchimento dei linguaggi naturali, ma anche, e vorremmo dire soprattutto alla costruzione ed alla evoluzione dei linguaggi convenzionali della scienza. Per esempio, si potrebbe riflettere alla grandissima importanza culturale che ha avuto la introduzione delle nostre convenzioni per la rappresentazione dei numeri; convenzioni che sono state inventate (come sembra) dagli indiani, ed a noi sono pervenute attraverso la civiltà araba.

È lecito pensare che l'impiego di questi strumenti del linguaggio matematico sia stato il punto di partenza della fioritura scientifica rinascimentale, che ha condotto alla scienza modernamente intesa. Pensiamo infatti che uno dei caratteri più importanti delle scienze moderne sia il ruolo fondamentale svolto dalla matematica, nel fornire idee e linguaggi, ma soprattutto nello stabilire quello schema concettuale rigoroso e preciso, che è una delle colonne portanti della scienza di oggi.

3.

Gli aspetti più importanti dell'impiego del linguaggio matematico nella scienza consistono in primo luogo nel fatto che la matematica fornisce degli strumenti insuperabili per la rappresentazione degli oggetti della scienza, ed in secondo luogo nel fatto che la sintassi dei simboli usati (in altre parole le leggi formali del simbolismo matematico) permettono una deduzione ineccepibile e rigorosa, che non ammette dubbi nelle conclusioni a cui si giunge.

È interessante osservare che questi aspetti della matematizzazione della realtà coinvolgono un ambito che è molto più vasto di quello abitualmente considerato. Infatti, nella concezione generale, la matematica può essere applicata esclusivamente agli oggetti misurabili o, in generale quantificabili; esiste invece tutto un ambito di oggetti che possono essere studiati con gli strumenti della matematica, al di fuori della concezione abituale e tradizionale di questa scienza. Ciò che presenteremo nelle pagine che seguono costituisce proprio una esemplificazione, che riteniamo efficace, di quanto abbiamo detto or ora: infatti ci proponiamo di presentare le idee fondamentali di una branca della scienza matematica nel suo nascere, idee che riguardano davvicino anche gli argomenti legati alle simbolizzazioni dell'artigianato tessile.

La branca della matematica di cui parliamo è oggi molto estesa, ed addirittura viene considerata come uno dei pilastri portanti del moderno pensiero matematico. Essa viene oggi chiamata topologia, e si suole far risalire la sua origine al secolo XVIII; uno dei primi esempi di opere appartenenti a questo ramo della matematica viene oggi identificato nella memoria dal titolo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (Soluzione di un problema riguardante la geometria di posizione) del grande matematico svizzero Leonhard Euler (1707-1783), il cui nome viene spesso richiamato nella forma latinizzata Leonardo Eulero; egli presentò nel 1739 all'Accademia delle Scienze di Pietroburgo, a proposito del celebre problema detto "dei sette ponti di Königsberg". Questo problema ritorna anche oggi frequentemente nelle rubriche di curiosità dei periodici; esso riguarda la città prussiana di Königsberg ed un'isola che è formata nel suo centro dal fiume Pregel; a quell'epoca l'isola era unita al resto della città da sette ponti (Cfr. fig. A) e non si sa chi pose il problema di percorrere in città un cammino che passi sopra ognuno dei ponti, senza tuttavia passare due volte sopra uno stesso ponte.

Eulero trasformò il problema rappresentando ogni regione con un punto ed ogni ponte con un arco che unisce due punti: egli ottenne così un problema che oggi viene contemplato dalla cosiddetta "Teoria dei grafi". In tal modo gli fu facile far vedere che il problema non può avere soluzione. Gli aspetti più originali e ricchi di conseguenze del ragionamento euleriano potrebbero essere identificati nelle circostanze seguenti: in primo luogo Eulero ideò un insieme di convenzioni per tradurre con simboli adatti il problema di cui si occupava; in secondo luogo egli fissò l'attenzione su certe caratteristiche del problema che segnarono l'inizio (come si è detto) di un nuovo capitolo della geometria, intesa come dottrina che razionalizza opportunamente le nostre conoscenze sugli oggetti che manipoliamo e sull'ambiente in cui viviamo ed operiamo.

Si legge nella citata memoria di Eulero:

"La branca della geometria che si occupa delle grandezze è stata accuratamente studiata già nel passato, ma c'è un'altra branca ancora oggi quasi sconosciuta: di essa parlò per primo Leibniz, chiamandola geometria di posizione (*geometria situs*). Questa branca della geometria tratta delle relazioni che dipendono solo dalla posizione e studia le proprietà di posizione: essa non prende in considerazione le grandezze e non coinvolge calcoli con quantità. Ma finora non sono state date soddisfacenti definizioni dei problemi appartenenti a questa geometria di posizione o dei metodi da usare per risolverli."

Nelle pagine che seguono cercheremo di precisare e di spiegare queste idee, cercando inoltre di collegare le analisi teoriche con le risultanze della storia del pensiero scientifico e con l'evoluzione delle tecniche artigianali e proto-industriali.

4.

La prima circostanza che rende interessante il meditare sul pensiero di Eulero, e che ci porterà anche a ricordare un altro matematico suo contemporaneo è, come abbiamo detto, la invenzione di un insieme di simboli adatti per rappresentare la realtà che si vuole conoscere, in vista di certi fini, teorici o pratici. Abbiamo già esposto questo pensiero nelle pagine precedenti, e qui ribadiamo la nostra convinzione sull'importanza della invenzione o della scelta di opportuni sistemi per rappresentare certe realtà (vorremmo dire addirittura "codificare" o anche "cifrare", nel senso di rappresentare in linguaggio cifrato). In questo ordine di idee quindi la pratica dei tessitori, di rappresentare sinteticamente le tecniche e le procedure della loro arte, si inserisce nella manifestazione generale dello spirito umano, di tramandare o trasmettere le informazioni; ma qui ci interessa soprattutto mettere in evidenza il fatto che questa trasmissione di informazioni viene eseguita preventivamente una scelta, la quale conduce ad individuare le informazioni giudicate importanti per certi fini e gli strumenti più efficaci ed appropriati per trasmetterle. In questa scelta, non sempre completamente cosciente, si manifesta spesso l'intelligenza e la creatività degli operatori e degli inventori. E vorremmo dire che questo aspetto della ingegnosità dei tessitori friulani si accompagna bene alle altre loro doti che li facevano apprezzare e ricercare nel mondo loro contemporaneo.

L'importanza della costruzione di un simbolismo comodo, efficace ed espressivo è uno degli aspetti più interessanti della matematica di ogni tempo: e si potrebbe osservare che spesso la fortuna di certe idee veramente geniali fu aiutata dalla invenzione di simbolismi comodi ed efficaci per la loro trasmissione. Abbiamo già espresso questo pensiero nel paragrafo 2, ricordando quale sia stata, per la nostra civiltà occidentale, l'importanza della adozione delle cifre arabe per rappresentare i numeri, prima rappresentati con le convenzioni dei romani. Aggiungiamo qui che l'efficacia e l'importanza di questa adozione sono commisurate non soltanto dalla possibilità di rappresentare, in modo comodo ed uniforme, dei numeri comunque grandi, ma anche, e vorremmo dire soprattutto, dalla possibilità di eseguire, con speditezza e sicurezza, le operazioni sui numeri. Più in generale, vorremmo dire che l'efficacia e la potenza di un simbolismo si commisurano spesso sulla possibilità di rappresentare certi oggetti o certi concetti, e soprattutto sulla possibilità di rappresentare e di controllare le operazioni su di essi, così da poterne prevedere in ogni caso i risultati prima di eseguirle.

5.

La seconda circostanza a cui accennavamo poco sopra è costituita dal fatto che l'attenzione dei ricercatori è fissata su certi aspetti della realtà che si presentano come essenziali nei riguardi dello studio che si sta eseguendo. In questo ordine di idee Eulero fu un precursore, nel senso che fissò la sua attenzione su certe circostanze degli oggetti della geometria che prima di lui non erano stati presi in considerazione. Infatti egli fondò quella che viene chiamata "geometria di posizione" oppure, con espressione latina "Analysis situs". Come abbiamo letto nelle sue pagine, in questa dottrina si prescinde dalle misure di lunghezza dei segmenti oppure di ampiezza di angoli, per tener conto soltanto, come dice il nome scelto, dalla mutua posizione dei punti e delle figure, indipendentemente dalla grandezza dei segmenti e degli angoli coinvolti. Una illustrazione abbastanza efficace di queste proprietà è fornita dai circuiti unidimensionali chiusi nel nostro spazio: consideriamo due circuiti cosiffatti, per esempio in forma di anelli; è evidente che il fatto che essi siano agganciati tra loro, oppure siano liberi non dipende dalla grandezza dei circuiti, né dalla loro forma; si tratta cioè di una proprietà della coppia di circuiti che non varia quando si operino delle deformazioni continue, purché tali deformazioni non producano rotture o attraversamenti. Analoghe considerazioni si possono svolgere a proposito delle figure che vengono chiamate "grafi"; abbiamo detto che Eulero si servì di una figura di questo tipo per risolvere il problema dei sette ponti di Königsberg; la topologia studia le proprietà di una figura come questa senza interessarsi delle misure dei segmenti o degli angoli, ma badando soltanto alle proprietà che non cambiano quando la figura sia deformata comunque, purché senza lacerazioni o duplicazioni e sovrapposizioni di parti.

Ritorneremo in seguito su queste idee. Aggiungiamo qui che Eulero dimostrò un celebre teorema (uno dei tanti che portano il suo nome) riguardante i poliedri. Tale proposizione potrebbe essere presentata nel modo seguente: consideriamo una figura poliedrica, che, per semplicità, supporremmo convessa, cioè tale che il piano che contiene una delle facce lasci da una stessa parte tutti i punti del poliedro che non appartengano a quella faccia: indichiamo poi con V il numero dei vertici del poliedro, con S in numero dei suoi spigoli, e con F il numero delle sue facce. Eulero dimostrò che, per qualunque poliedro convesso, fra questi tre numeri sussiste sempre la relazione:

$$V + F = S + 2 \qquad (*)$$

che viene oggi ricordata abitualmente come "relazione di Eulero".

Supponiamo ora di costruire un modello della superficie poliedrica con un materiale deformabile: per esempio supponiamo di realizzare la superficie in gomma, ed immaginiamo che gli spigoli possano essere tracciati sulla superficie in modo indelebile. Deformiamo ora la superficie, senza tuttavia lacerarla o sovrapporre qualche parte ad un'altra: avverrà in generale che le facce diventeranno dei “pezzi”, anche non piani, e che gli spigoli perderanno il loro carattere di segmenti rettilinei; possiamo tuttavia chiamare ancora facce i pezzi di cui la superficie è composta, spigoli i tratti di linee lungo le quali i pezzi sono saldati tra loro, e chiamare vertici i punti in cui diverse linee di sutura si incontrano. Con questa nomenclatura la relazione (*) risulta ancora valida; essa infatti esprime una proprietà della superficie che è, come si suol dire, di carattere topologico, cioè invariante di fronte a deformazioni continue. Per esempio essa è valida per i palloni usati nel gioco del calcio, che sono costruiti con vari pezzi suturati tra loro.

È interessante osservare che il grande Eulero dimostrò la relazione che porta il suo nome facendo ricorso a dei concetti che riguardano misure, e cioè impiegando degli strumenti concettuali che non gli permisero di rilevare tutta la generalità della sua proposizione; la quale (ripetiamo) vale non soltanto per i poliedri ma anche per qualunque figura dello spazio che si possa ottenere da un poliedro per deformazioni continue.

6.

Abbiamo visto che le origini della topologia possono essere incontrate nelle opere del grande matematico svizzero Leonardo Eulero, anche se, come si è detto, egli stesso non fu conscio della vastità delle conseguenze che hanno origine da certi suoi metodi.

È interessante tuttavia osservare che gli elementi fondamentali dei concetti sviluppati da Eulero si incontrano anche presso un altro matematico della sua epoca, che ebbe con Eulero ben pochi rapporti. Questa circostanza induce a pensare che l’ampliamento del dominio della matematica (e della geometria in particolare) fosse, per così dire, nell’aria, cioè rispondesse ad una specie di esigenza culturale, originata forse dalla vastità delle conoscenze acquisite, dalla maturazione dei metodi matematici e dall’ampliarsi dei problemi affrontati.

Le idee alle quali accenniamo furono esposte in Francia, nell’anno 1771, dal matematico A. T. Vandermonde (1735-1796) in una memoria, presentata alla Académie royale des sciences, dal titolo: *Remarques sur les problèmes de Situation*. In quest’opera il matematico francese dichiara esplicitamente di voler studiare dei problemi geometrici che non riguardano la misura degli enti considerati, ma soltanto la loro reciproca posizione. Egli infatti scrive:

“Quali che siano le circonvoluzioni di uno o più fili nello spazio, si può sempre averne una espressione attraverso il calcolo delle grandezze; ma questa espressione non sarebbe di alcun uso nelle Arti. L’operaio che fa una treccia, una rete, dei nodi non li prende in considerazione per i rapporti di grandezza, ma per quelli di situazione; ciò che lo interessa è l’ordine con cui i fili sono intrecciati. Sarebbe quindi più utile avere un sistema di “calcolo” più conforme al modo di pensare e di procedere dell’operaio, una notazione che rappresenti l'idea che egli si fa del suo lavoro e che può bastare per rifarne uno simile in qualunque momento. Il mio obbiettivo qui è quello di fare intravvedere una tale notazione ed il suo uso nella questione dell'intreccio dei fili".

Vandermonde prosegue proponendo una suddivisione dello spazio che permetta di rappresentare il percorso di un filo utilizzando dei numeri che non rappresentino delle quantità, bensì dei posti nello spazio.

Egli prosegue quindi proponendo di dividere il piano in parallelogrammi (Cfr. figg. 1 e 2) e lo spazio in cubetti, e proponendo di rappresentare ogni figura elementare con due (o rispettivamente con tre) numeri interi, che noi chiameremmo "coordinate" della celletta piana o spaziale. Egli osserva che assegnando una successione di terne di numeri si può descrivere il cammino di un filo nello spazio, e dà degli esempi in cui descrive una treccia o una maglia di calza (Cfr. figg. 3 e 4). Egli osserva esplicitamente che non ha importanza il fatto che il filo sia più o meno teso, oppure che subisca delle deformazioni nell'interno del cubetto: la sola cosa che interessa sapere è che il filo entra nel cubetto da una faccia e ne esce da un'altra e che queste facce sono ben determinate dalle notazioni da lui proposte. In modo analogo egli osserva che i cubetti possono essere deformati in parallelepipedi, senza che cambi la natura della treccia o della maglia che sono descritte.

Nello stesso lavoro, il Vandermonde presenta un'altra applicazione dei concetti da lui esposti, risolvendo il problema che oggi viene chiamato "del salto del cavallo"; questo potrebbe essere enunciato dicendo che si vogliono toccare tutte le caselle di una scacchiera tradizionale (di 64 quadretti), muovendo il cavallo con la sua mossa caratteristica ben nota, senza passare due volte per una medesima casella. Il problema era stato risolto circa 18 anni prima, nel 1759, da L. Eulero. Vandermonde osserva che il procedimento dato da Eulero presuppone che si abbia la scacchiera davanti agli occhi, mentre egli si propone di ridurlo ad un semplice problema di aritmetica, fatta su dei numeri, che non rappresentano quantità ma soltanto dei posti nel piano. Egli osserva che

"... far percorrere al cavallo tutte le caselle della scacchiera, senza passare due volte per la stessa, equivale a determinare un certo tracciato del cavallo; o, meglio, immaginando uno spillo fissato al centro di ogni casella, si riduce a determinare il corso di un filo passato una volta attorno ad ogni spillo con una legge di cui cercheremo l'espressione". (Si veda la fig. 5)

7.

Nelle pagine precedenti ci siamo soffermati a riflettere sul significato e sull'importanza delle ricerche dei matematici che abbiamo ricordato; abbiamo anche sottolineato l'importanza della invenzione di un simbolismo chiaro ed efficace, per la scienza e per la tecnica.

Vorremmo concludere queste pagine con qualche sommaria osservazione sull'epoca storica nella quale è vissuto Vandermonde, e sul clima sociale e politico nel quale egli ha lavorato. Infatti la vita e le opere di Eulero sono state studiate da molti, per l'importanza che la sua figura ha nella storia della scienza; il Vandermonde non ha la stessa statura scientifica di Eulero, e quindi la sua vita e le circostanze nelle quali essa si svolse sono meno conosciute e ricordate. Tuttavia la sua figura umana e lo spirito e l'impegno con il quale egli lavorò meritano qualche ricordo.

Alexandre Théophile Vandermonde nacque a Parigi nel 1735, e si fece notare presto per la sua intelligenza matematica. Nel 1771 egli fu eletto membro della Accademia delle Scienze di Parigi. Nelle memorie di questa istituzione si trovano tutti i suoi studi matematici; questi lavori non sono molto numerosi perché egli aderì con entusiasmo alla Rivoluzione, nel 1789 fu eletto membro della Comune di Parigi e nel 1790 entrò nel club dei Giacobini, insieme con G. Monge, un altro matematico che lasciò una traccia nella storia della scienza.

Egli abbandonò quindi gli studi di scienza pura, per darsi alla politica e alle opere pratiche in favore della Rivoluzione: per esempio egli assisté il Monge nella direzione della fabbrica di armi, delle quali i francesi repubblicani avevano bisogno per le loro guerre.

Crediamo che si possa pensare che il Nostro maturò le sue idee sulla topologia dei fili e dei lavori di tessitura seguendo il clima sociale e politico della Francia illuminista; tale clima, com'è noto, fu creato dagli enciclopedisti e favorì la concezione di una conoscenza scientifica (anche la più astratta come la matematica) che trovasse la propria giustificazione nello stretto contatto con la tecnica, concepita come uno strumento di dominio sulla Natura, di liberazione dalla fatica e quindi, in definitiva, anche di liberazione politica.

Questa concezione potrebbe ispirare qualche legittima perplessità in chi non accetta una visione riduttiva della scienza, che la giustificherebbe soltanto in forza delle possibilità di applicazione alla tecnica ed al dominio della Natura; si può pensare infatti che la scienza, come ogni altra attività squisitamente spirituale (come l'arte, per esempio) abbia un suo valore in sé, indipendentemente dalla possibili applicazioni. Tuttavia non si può non ammirare l'entusiasmo e la dedizione con cui questi scienziati si sono posti al servizio della società, per un mondo migliore e più giusto, cercando di portare a livello scientifico ciò che l'intelligenza e la creatività dell'artigiano aveva inventato, in altre circostanze, per impieghi esclusivamente pratici.

Milano, maggio 1991.

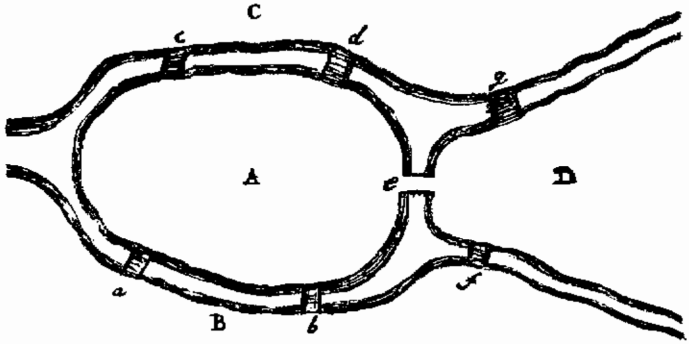


Fig. A
Schema dell'isola, formata dal fiume Pregel nel centro di Königsberg, e dei sette ponti: a, b, c, d, e, f, g, che diedero origine al celebre "problema" discusso da Eulero.

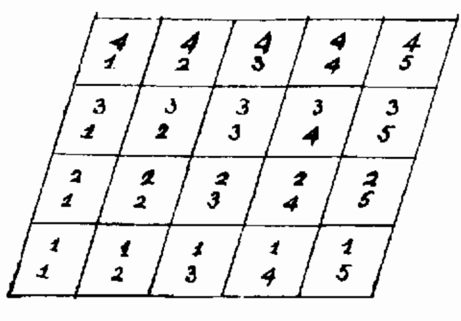


Fig. 1
Il piano diviso in parallelogrammi, ciascuno contrassegnato da due numeri, secondo le idee di Vandermonde.

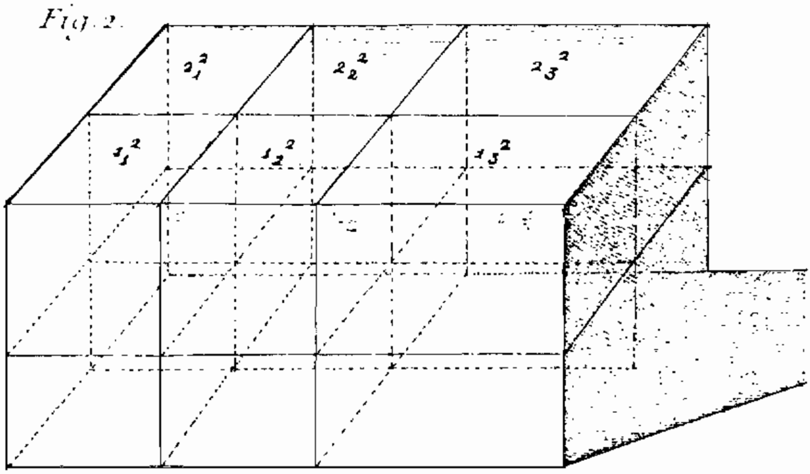


Fig. 2
Lo spazio ripartito in cubetti.

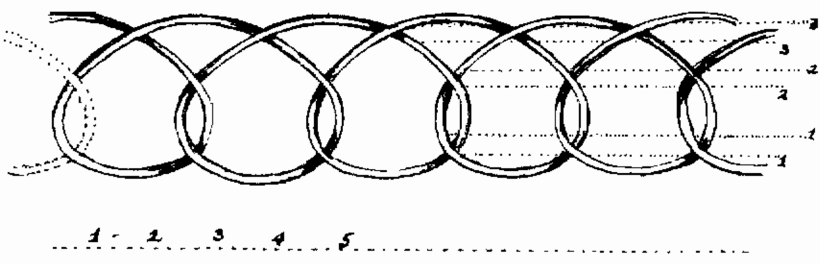


Fig. 3
"Catenella" con le rappresentazioni convenzionali di Vandermonde.

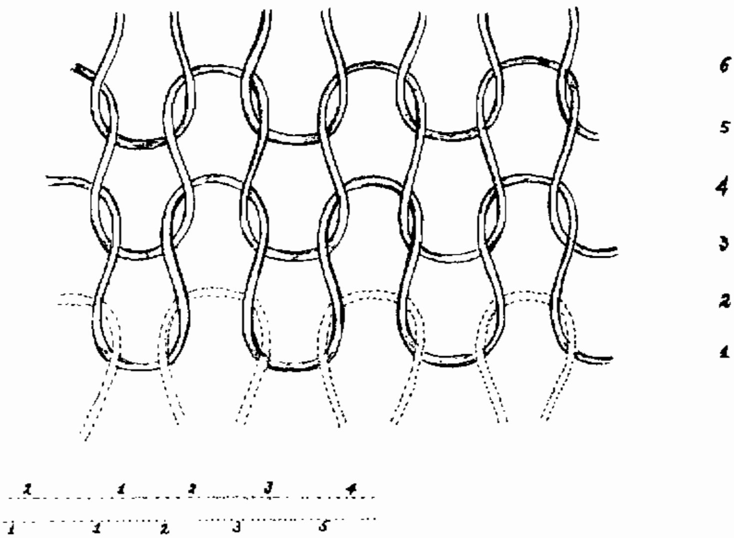


Fig. 4
"Lavoro a maglia" con le rappresentazioni convenzionali di Vandermonde.

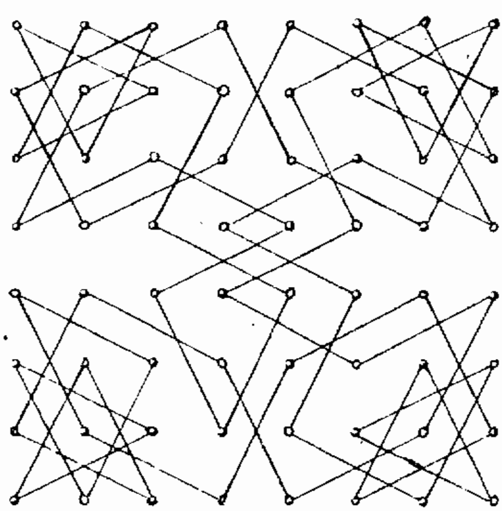


Fig. 5
Soluzione del problema del "cavallo" sulla scacchiera. Il percorso è materializzato con un filo avvolto su spilli.